§1.3 可数集 不可数集

Def. 若存在自然数 n s.t. $A \sim M_n$，则 A 为有限集.

其中 $M_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，$A$ 的基数为 n.

Def. 若 $A \sim N$，则 A 为可列集，A 的基数为 $\aleph_0$

Rem. 可列又称为可数.

Thm. A 可数 $\Leftrightarrow A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$

Pf. $\Leftarrow$：若 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$

令 $f(k) = a_k$，$k = 1, 2, \cdots, n, \cdots$

则 $f: N^+ \to A$ 为双射，于是 $A \sim N^+ \sim N$

$\Rightarrow$：A 可数，则 $A \sim N$，$\varphi: N \to A$，$k \in N$，$\exists ! \varphi(k) \in A$

由 φ 双射知，$\varphi(N) \subseteq A = \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n), \cdots\}$

即 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

Thm. 任意无限集都有一个可列的真子集

Pf. $\exists a_1$ s.t. $A \setminus \{a_1\} \neq \phi$，$\exists a_2$ s.t. $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \phi$

一定有 $\exists a_k$ s.t. $a_k \in A \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}\}$

于是 $A_0 = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ 可列

类似有 $\{a_2, a_3, \cdots\}$ 可列 且 $\{a_2, a_3, \cdots\} \subset A$ 为真子集

Thm. 可数集的无限子集可数

Pf. 取 $A = B_0 \subseteq B$，$\varphi: A \to A$，$x \mapsto x$，于是 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$

设 B 可列，$\overline{\overline{B}} = \aleph_0$，$C \subseteq B$ 无限，则 $\overline{\overline{B}} \geq \overline{\overline{C}}$，下证 $\exists$ $\overline{\overline{D}} = \aleph_0$

s.t. $D \subseteq C \subseteq B$：由 C 无限知存在 D

由 Bernstein Thm 知，D 是无限可列子集.

Thm. $[0,1]$ 不是可数集

Pf. 假设 $[0,1] \sim \{1,2,\cdots\}$，则 $[0,1] = \{a_1, a_2, \cdots\}$

$\exists \beta \in [0,1]$ 但 $\beta \neq a_k$，这样的 β 总是存在的：

令 $a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$

$\vdots$

$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$

$\vdots$

作 $b = 0.b_{11}b_{22}b_{33}\cdots$，其中 $b_{ii} = \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 2, & a_{ii} = 1 \end{cases}$

于是令 $\beta = b$，有矛盾，即 $[0,1] \not\sim \{1,2,\cdots\}$.

Cor. $\overline{\overline{[0,1)}} = \aleph$，$\overline{\overline{(0,+\infty)}} = \aleph$，

Prop. 基数的运算

(1) $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}} < \infty$，$\overline{\overline{A\cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A\times B}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}$

(2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$　$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$，$\sum_{k=1}^{\infty} \aleph_0 = \aleph_0$（对角线可证）

$\aleph_0 + n = \aleph_0$　$\aleph_0 \times \aleph_0 \times \cdots \times \aleph_0 = \aleph_0$

Def. $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Thm. 有限个可数集的乘积可数

有限个至多可数集的乘积是至多可数的.

Prop. 连续基数的性质

(1) $\aleph_0 + \aleph = \aleph$

(2) $\aleph \times \aleph \times \cdots \times \aleph = \aleph$

(3) $\aleph \times \aleph \times \cdots = \aleph$

Pf. (1) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$, $\overline{\overline{B}}=c$

$\exists B_0\subset B$ s.t. $\overline{\overline{B_0}}=\aleph_0$, 则 $A\sim A\cup B_0$

$A\cup B=A\cup B_0\cup(B\setminus B_0)\sim B_0\cup(B\setminus B_0)$, 即 $\aleph_0+\aleph=\aleph$

(2) $A\sim(0,1)$, $B\sim(0,1)$, 只需证 $(0,1)^2\sim(0,1)$:

$\forall x\in(0,1)^2$, $x=(x_1,x_2)$, 其中:

$x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$, $x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$

令 $\varphi:(0,1)^2\longrightarrow(0,1)$, $\varphi(x)=0.a_{11}a_{21}a_{12}a_{22}a_{13}a_{23}\cdots$

事实上φ是满的 下面证φ是单的:

对于$\varphi(y)=0.y_1y_2y_3y_4\cdots$, 取$\varphi(z)=\varphi(y)$.

则 $z_0=(z_1,z_2)$, $z_1=0.z_{11}z_{12}z_{13}\cdots$, $z_2=0.z_{21}z_{22}z_{23}$

于是有 $z=y$, 即 $(0,1)^2\sim(0,1)$, $\aleph\times\aleph\times\cdots\times\aleph=\aleph$

(3) 只需证 $(0,1)^\infty\sim(0,1)$ (对角线可证)

Cor. (1) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 可列

(2) 以整数为系数的多项式全体可列 (可列个可列集的并)
(有理数)

Lem. 二进制小数表达是唯一的.

Pf. 由闭区间套定理可知.

但事实上, 开闭区间选择会导致 $\frac{p}{2^k}$, $p\leqslant 2^k$, $p\in\mathbb{N}$ 的表达式有多个, 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\frac{p}{2^k}\}$ 的基数为 $\aleph_0$

Cor. $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ (无歧义时 $\aleph=\aleph_1$)

Thm. $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{2^A}}$ (Cantor Thm.)

其中 2^A 表示 A 的所有子集构成的集合.

Pf. (1) $\overline{\overline{A}} = n < +\infty$，显然成立.

(2) $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$，则 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$，也成立.

(3) $\overline{\overline{A}} > \aleph_0$，假设 $\exists \varphi : A \to 2^A$，

$A_1 = \{b \mid b \notin \varphi(b)\}$，下证 A_1 存在矛盾：

①若 $A_1 \neq \phi$，则 $\forall b \in A_1$，$\exists b \in \varphi(b)$，$\{b\} \subseteq \varphi(b)$

则 $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{b\}$，$\varphi(b) = \{b\}$

②若 $A_1 \neq \phi$，则 $y \in A_1$ 有矛盾.